数理解析研究所講究録
1094 巻 1999 年 83-87

SLOWLY INCREASING GENERALIZED WHITTAKER FUNCTIONS FOR DERIVED FUNCTOR MODULES OF $Sp(2,\mathbb{R})$ AND NILPOTENT ORBITS

宮崎 琢也 (TAKUYA MIYAZAKI)

東京都立大 理 (Tokyo Metropolitan Univ.)

1. INTRODUCTION

正則 Siegel 保型形式に対して普通の Fourier 展開を考えるとき、よく知られているように Koecher 原理 (“正則なら半正定値”) というのがある。また表現論的定式化のもとでは、保型表現に関して、大域的、あるいは局所的な Whittaker 模型 (極小放物型部分群の巾単部分群の指標に関する一般化された球関数空間への表現の実現) の存在がよく問題にされる。これについても非自明な (よい) 模型が存在するためには、表現と球関数空間がなにかの意味で” 適度によく性質が符合していなければいけない” ことが、しばしば観察される。この稿では、正則とは限らない実調和的 Siegel 保型形式について、その Fourier 展開を考えるとき、Koecher 原理に当たるようなことがあるかどうか、ある場合はどんな風になっているかということを問題にする。結論をいえば、次数 2 の (幾何的な) 実調和的 Siegel 保型形式について、相当する事実はあって、それは実素点での表現に対して定義される、Lie 環のある冪零共役軌道が有するべき性質として記述されてよい、ということである。表現に対応する冪零軌道とよい模型の存在の関係については、広い範囲で予想が既に立てられているので、その例だと考えてよいと思う。

2. 緩増大な一般化された WHITTAKER 関数

具体化のため全て、$G = Sp(2,\mathbb{R}) = \left\{g \in SL_4(\mathbb{R}) \mid {}^tgJg = J = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1_2 \\ -1_2 & 0 \end{smallmatrix}\right)\right\}$ で記述する。$P \subset G$ を Siegel 型放物部分群とする。実際、$P = L \ltimes N$, $L = \left\{\left(\begin{smallmatrix} m & 0 \\ 0 & {}^tm^{-1} \end{smallmatrix}\right) \mid m \in GL_2(\mathbb{R})\right\}$, および $N = \left\{n(x) = \left(\begin{smallmatrix} 1_2 & x \\ 0 & 1_2 \end{smallmatrix}\right) \mid x = {}^tx\right\}$ と書かれる (Levi 分解)。冪単部分群 N の非退化なユニタリ指標 ψ を一つ固定する。L は N を正規化して、つまり作用しているが、これにともなう非退化ユニタリ指標 ψ の L 内の固定化部分群の連結成分をとって、それを

$SO(\psi)$ と名付けよう。実際は、$SO(\psi)$ は $SO(2)$ か $SO(1,1)$ のいずれかに同型である。もう一つ $SO(\psi)$ のユニタリ指標 χ を固定し、半直積 $R := SO(\psi) \ltimes N$ のユニタリ指標 $\eta = \chi \cdot \psi$ を自然に定義する。このとき C^∞ 関数の範疇で誘導表現

$$C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_R^G(\eta) := \{f : G \to \mathbb{C} \mid \text{smooth},\ f(rg) = \eta(r)f(g),\ (r,g) \in R \times G\},$$

(G の作用は右移動) を考え、reduced generalized Gelfand-Graev 表現とよぶ。

G の Hilbert 空間上の既約 admissible 表現 $(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ をとる。G の極大コンパクト部分群 K を一つとる。G の Lie 環を $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$, 複素化を $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_\mathbb{R} \otimes \mathbb{C}$, などとかく。$(\pi, \mathcal{H}_\pi)$ に付随する Harish-Chandra 加群 $(\pi, \mathcal{H}_{\pi,K})$ について、$(\mathfrak{g}, K_\mathbb{C})$ 加群の射全体、

$$\mathrm{Wh}_\eta(\pi) := \mathrm{Hom}_{(\mathfrak{g},K_\mathbb{C})}(\mathcal{H}_{\pi,K}, C^\infty\text{-}\mathrm{Ind}_R^G(\eta)_K),$$

を考え、これを、π の一般化された Whittaker 実現の空間、とよぶことにする。さらにこの部分空間で、像が G 上の関数で無限遠方での絶対値の増大が多項式程度になる実現たちからなるものを、ここでは、

$$C^{-\infty}\mathrm{Wh}_\eta(\pi) \subset \mathrm{Wh}_\eta(\pi)$$

と書くことにし、これを、π の緩増大な一般化された Whittaker 実現の空間、とよぶ。ここで、無限遠方というのを、G の部分群 $A = \{a = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_1^{-1}, a_2^{-1}) \mid a_1,\ a_2 > 0\}$ で $a_1, a_2 \to +\infty$ となるところ、というふうにする。Cartan-Iwasawa 型の分解, $G = R \cdot A \cdot K$ という分解があることに注意。

3. 表現に関する実冪零軌道と埋め込み予想

2 節で導入したような表現の指標の特徴をよく調べることによって、π の asymptotic support と呼ばれる実冪零 G-軌道

$$\mathrm{AS}(\pi) \subset \sqrt{-1}\mathfrak{g}_\mathbb{R}$$

が定義されて、Barbasch-Vogan [B-V]、有効な役に立つ性質を持つ。Harish-Chandra 加群 $(\pi, \mathcal{H}_{\pi,K})$ に対しては、π の associated variety と呼ばれる複素冪零 $K_\mathbb{C}$-軌道 $\mathrm{AV}(\pi) \subset \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}$, も定義される, 例えば [V] をみよ。この二つは Kostant-Sekiguchi 対応とよばれるものによって、互いに移りあい対応するとしばらく予想されていた (Barbasch-Vogan) が、最近 Schmid-Vilonen によって肯定的に証明された、[S-V]。さて冪零軌道の言葉を用いると、予想 (の一部) はつぎのようなものである。

予想. N の指標 ψ, G の既約 *admisible Hilbert* 表現 π を固定する。このとき、

(1) ある $SO(\psi)$ のユニタリ指標 χ が存在して、$C^{-\infty}\text{-Wh}_\eta(\pi) \neq 0$,

(2) ψ を通る実冪零 *adjoint* G-軌道 を $\mathcal{O}_\psi^{\mathbb{R}}$ とかくと、$AS(\pi) \supset \mathcal{O}_\psi^{\mathbb{R}}$,

は同値。

これは、Rodier に発して、Kawanaka, Moeglin, Matumoto, Howe などの人達によって考えられてきたことのようである。Matumoto [Ma] では、上の π の asymptotic support にあたる軌道が一番大きい次元のもの (principal nilpotent orbits) であるとき, π のいわゆる $C^{-\infty}$-Whittaker vectors が存在する必要十分条件としての上の予想が正しいことが、一般的な実 Lie 群に対して示されている。また、上に挙げた人達などによって、予想のような方向を念頭にして、複素、実、p 進、有限体係数のそれぞれの場合に、なされている研究がある。

4. $Sp(2,\mathbb{R})$ の DERIVED FUNCTOR MODULES と $C^{-\infty}$-WHITTAKER EMBEDDINGS

$G = Sp(2,\mathbb{R})$ の場合、$\mathfrak{g}^*$ の中の冪零 $K_{\mathbb{C}}$-軌道は次のように signed Young 盤でパラメトライズされる。

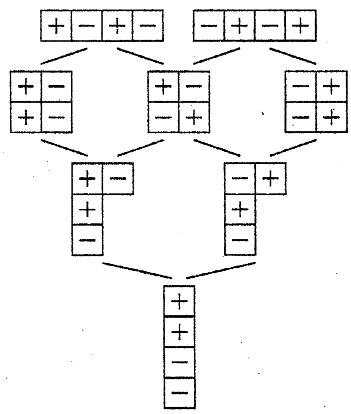

図 1. THE SIGNED YOUNG TABLEAUX FOR $\mathfrak{sp}(2)$

今、G の derived functor modules を考える。これらを構成するための、θ-stable parabolic subalgebras $\mathfrak{q} \subset \mathfrak{g}$ の $K_{\mathbb{C}}$ 共役類は 10 種類存在する。$\mathfrak{g}$ の compact Cartan subalgebra を $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C}$ と書くとき、よく知られているように、各 θ-stable parabolic subalgebras は、ある $X \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ に関して、$\mathfrak{q} = \mathfrak{q}(X)$ というように決めることが出来る。この $X \in \sqrt{-1}t_{\mathbb{R}}$ のとり方を挙げると、下の図で番号をふってあるぶんだけ存在す

る (1 は線で囲まれた領域、5 は原点から始まる半直線、10 は原点、など、数字のかかれている場所から自然に判断される図形の一般的な点として、$X \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ を選ぶ)。

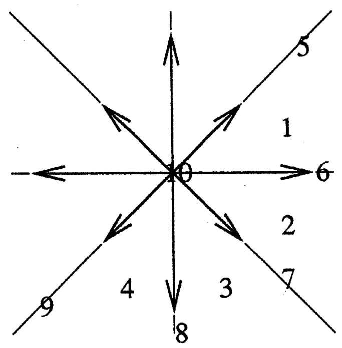

図 2. $X \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}$ のとりかた

この表のそれぞれの番号付け k に対応する θ-stable parabolic subalgebra を $\mathfrak{q}_k$ とかこう。このとき $\mathfrak{q}_k$ に関してよい範囲にある $\lambda \in \sqrt{-1}\mathfrak{t}_{\mathbb{R}}^*$ をとると、既約ユニタリな derived functor module $A_{\mathfrak{q}_k}(\lambda)$ が構成され、それらの associated varieties は,

$$\mathrm{AV}\big(A_{\mathfrak{q}_1}(\lambda)\big) = \overline{\mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}+&-\\+&-\end{smallmatrix}}} = \mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}+&-\\+&-\end{smallmatrix}} \amalg \mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}+&-\\+&\\-&\end{smallmatrix}} \amalg \mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}}, \qquad \mathrm{AV}\big(A_{\mathfrak{q}_2}(\lambda)\big) = \overline{\mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}+&-&+&-\end{smallmatrix}}},$$

$$\mathrm{AV}\big(A_{\mathfrak{q}_3}(\lambda)\big) = \overline{\mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}-&+&-&+\end{smallmatrix}}}, \quad \mathrm{AV}\big(A_{\mathfrak{q}_4}(\lambda)\big) = \overline{\mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}-&+\\-&+\end{smallmatrix}}}, \quad \mathrm{AV}\big(A_{\mathfrak{q}_5}(\lambda)\big) = \overline{\mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}+&-\\+&-\end{smallmatrix}}},$$

$$\mathrm{AV}\big(A_{\mathfrak{q}_6}(\lambda)\big) = \overline{\mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}+&-\\+&-\end{smallmatrix}}}, \quad \mathrm{AV}\big(A_{\mathfrak{q}_7}(\lambda)\big) = \overline{\mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}+&-\\-&+\end{smallmatrix}}}, \quad \mathrm{AV}\big(A_{\mathfrak{q}_8}(\lambda)\big) = \overline{\mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}-&+\\-&+\end{smallmatrix}}},$$

$$\mathrm{AV}\big(A_{\mathfrak{q}_9}(\lambda)\big) = \overline{\mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}-&+\\-&+\end{smallmatrix}}}, \quad \mathrm{AV}\big(A_{\mathfrak{q}_{10}}(\lambda)\big) = \overline{\mathcal{O}_{\begin{smallmatrix}+\\+\\-\\-\end{smallmatrix}}} = \{0\},$$

図 3.

のようにかける。ここで $\mathcal{O}_Y$ は signed Young 盤 Y に関する冪零 $K_{\mathbb{C}}$-軌道、上つきの線は閉包をあらわす。$K_{\mathbb{C}}$-軌道のあいだの closure relations は、図 1 の線の引き方から自然に想像されるものがそれである。さて各 $A_{\mathfrak{q}_k}(\lambda)$ の、緩増大な (一般化された)Whittaker 埋め込みの様子については、[M], Section 4, などで紹介してある。現在はもうすこしよい表示、理解の仕方も出来るようになっているが、それはここでは述べないことにして、大体大事なこと (特に N の指標 ψ についての条件など) はそこに報告されている。まとめて結論を述べると、

結論. 図 *1,3* における *associated varieties* $\mathrm{AV}\big(A_{\mathfrak{q}_k}(\lambda)\big)$ から、*Kostant-Sekiguchi* 対応で得られる実冪零軌道 *asymptotic supports* $\mathrm{AS}\big(A_{\mathfrak{q}_k}(\lambda)\big)$ のそれぞれに対して、そこに含ま

れる N の指標 ψ の条件を書き下して、以前の計算で得ていた事実と照らしあわせると、3 節で述べた"予想"は、次元の小さな軌道に対してもちゃんと成り立つことが、自然に読みとれる。

ということである。上で、軌道に含まれる指標とかいたが、これはよく行われる、不変内積から決まる同一視 $\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{g}^*$ を通してという意味である。そもそも表現に対して定義される $\mathrm{AV}(\pi)$, $\mathrm{AS}(\pi)$ は、$\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}^*$ のなかの冪零軌道である。結論を少し具体的に表現すると、例えば、$A_{\mathfrak{q}_1}(\lambda)$ の asymptotic support には、普通の Fourier 展開を考えるときの、半正定値な指標が含まれ (Koecher 原理の再述)、$A_{\mathfrak{q}_7}(\lambda)$ の asymptotic support には、不定値の指標が含まれ、large discrete series $A_{\mathfrak{q}_2}(\lambda)$ には、普通の Fourier 展開を考えるときは、半正定値、不定値両方の指標が現れ、これは微分方程式を考えて得た、" 保型形式としてよい解" の存在条件と一致している、ということなど。軌道に関する具体的な計算については、[N] の結果などを用いて、あとは行列を計算してみた。もっともここの計算は行列でなくて、ふつうの意味の構造論で書いていけば一般で出来るというのが望ましいし、実際そうできるような準備は整っていると思う。実ユニタリ群 $SU(2,2)$ についても、織田, 早田や、権 ("middle" discrete series) 各氏の計算結果をみて、再び軌道の表をかいて比較してみると、予想が満たされないような状況は今のところ見ていない。ほかにもこんな感じで定式化して考えてみてもいいようなものがいくつかあると思う。

References

[B-V] D. Barbasch and D. Vogan, *The local structure of Characters*, J. Funct. Anal. **37** (1980), 27-55.

[K] N. Kawanaka, *Shintani lifting and Gelfand-Graev representations*, Proc. Sympos. Pure Math. **47** (1987), 147-163.

[Ma] H. Matumoto, *$C^{-\infty}$-Whittaker vectors corresponding to a principal nilpotent orbit of a real reductive linear Lie group, and wave front sets*, Compositio Math. **82** (1992), 189-244.

[M] T. Miyazaki, *Geometric automorphic forms and spherical functions related to them,* II, 数理解析研究所講究録 **1026** (1998), 195-203.

[N] A. Nöel, *Nilpotent orbits and theta-stable parabolic subalgebras*, Representation theory **2** (1998), 1-32.

[S-V] W. Schmid and K. Vilonen, *Characteristic cycles and wave front cycles of reresentations of reductive Lie groups*, to appear in Ann. of Math..

[V] D.A. Vogan, *Associated varieties and unipotent representations*, Harmonic Analysis on Reductive Groups (W. Baker and P. Sally, eds.), Birkhäuser, Boston-Bassel-Berlin (1991), 315-388.

Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University, 1-1 Minami-Ohsawa, Hachioji-shi, Tokyo 192-0397, Japan

E-mail address: ta-miya@comp.metro-u.ac.jp